תורת הקבוצות, תרגיל 6

1. הוכח כי הטענות הבאות שקולות:

א. פונקציה F שתחומה A הינה חח"ע.

ב. לכל $B, C \subseteq A$ מתקיים $F[B] \cap F[C] = \emptyset$ אם ורק אם $B \cap C = \emptyset$.

ג. לכל $B \subseteq A$ מתקיים $F[A \setminus B] = F[A] \setminus F[B]$.

2. הוכח, כי אם היחס $\leq$ הינו יחס סדר חלקי על A אז היחס $<$ על A המוגדר ע"י $x < y$ אם $x \leq y$ וגם $x \neq y$ גם הוא יחס סדר חלקי על A (זוהי למה 60 בסיכומי ההרצאות).

3. הוכח, כי התנאים הבאים (עבור עוצמות) הם שקולים:

א. $a < b$.

ב. קיימות קבוצות A, B כך, ש $|A| = a, |B| = b$ ומתקיים $A \prec B$.

ג. לכל שתי קבוצות A, B כך, ש $|A| = a, |B| = b$ מתקיים $A \prec B$.

(זוהי למה 267ב' בסיכומי ההרצאות).

4. הוכח שכל אחת מן הקבוצות הבאות שוות עוצמה לקבוצת המספרים הממשיים $\Re$.

א. ${}^N N$ (קבוצת כל הפונקציות מהמספרים הטבעיים למספרים הטבעיים). רמז: זכור איך הגדרנו את מושג הפונקציה.

ב. קבוצת כל הזוגות הסדורים של איברי ${}^N N$, כלומר הקבוצה ${}^N N \times {}^N N$.

ג. קבוצת כל הנקודות במישור.

ד. קבוצת כל הקבוצות של שני מספרים ממשיים (שונים זה מזה, כמובן).

ה. קבוצת כל המספרים האירציונליים.

5. תהי S קבוצה אינסופית של מספרים חיוביים כך, שלכל $B \subseteq S$ בת מניה, סכום איברי B סופי (כסכום של טור מספרים חיוביים). הוכיחו, תוך שימוש באקסיומת הבחירה, כי S בת מניה.

תאריך ההגשה: 1.12.2004